Towards Mathematical Sciences

Vol. 2, No. 1, Spring and Summer 2022, pp. 1–16

DOI.10.22067/tmsj.2021.41429

Expository Article

SOME TOPICS ON OPTIMAL DUAL FRAMES IN HILBERT SPACES

FAHIMEH ARABYANI-NEYSHABURI[1] AND ALI AKBAR AREFIJAMAAL[1*]

[1]Faculty of Mathematics and Computer Sciences, Hakim Sabzevari University, Sabzevar, IRAN
fahimeh.arabyani@gmail.com;
arefijamaal@hsu.ac.ir

Abstract. In data transmissions usually a part of the data vectors are reshaped or erased, and we need to perform the reconstruction by using the partial information at hand. Hence, one of the deepest and most precious problems in frame theory is optimal dual problem, which asks for finding the best dual frames that minimize the reconstruction errors when erasures occur. In this paper, we will review on application of dual frames in signal processing, then we mention optimal reconstruction problem and some achievements and finally we state some open problems in this respect for readers.

2020 Mathematics Subject Classification. 42C15, 42C40
Keywords. Frames, dual frames, optimal duals, reconstruction formulas
Date: Rceived 15-7-2021 Revised 9-11-2021 Accepted 21-11-2021 Available Online 7-12-2021
*Corresponding author.

دوره ۲، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۱، صص. ۱۶-۱
DOI. 10.22067/tmsj.2021.41429
مقاله علمی-ترویجی
به سوی علوم ریاضی
https://tmsj.um.ac.ir

مباحثی روی دوگان بهینه قاب‌ها در فضاهای هیلبرت

فهیمه عربیانی نیشابوری[۱] و علی اکبر عارفی جمال[۱*]

[۱] دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری
fahimeh.arabyani@gmail.com
arefijamaal@hsu.ac.ir

چکیده. در مبحث انتقال داده‌ها معمولا بخشی از داده‌ها از دست می‌روند یا تغییر شکل می‌دهند و مایلیم تنها با بخشی از اطلاعات در دسترس بازسازی عناصر را انجام دهیم. با توجه به اینکه قاب‌ها از ابزارهای بسیار مهم در انتقال داده‌ها محسوب می‌شوند، بنابراین یکی از مسائل مهم در نظریه قاب‌ها، پیدا کردن الگوریتم هایی برای بازسازی بهینه تحت حذف برخی ضرایب است. در این مقاله، شرح مختصری بر کاربرد دوگان قاب‌ها در پردازش سیگنال خواهیم داشت. سپس، مساله بازسازی بهینه و برخی دستاوردها در این زمینه را مطرح می‌کنیم. در نهایت چند مسأله باز در این راستا برای علاقه‌مندان مطرح خواهیم کرد.

۱. سرآغاز

قاب‌ها در فضاهای هیلبرت دنباله‌هایی از بردارها هستند که الگوریتم‌های موثری برای بازسازی و تجزیه عناصر فضا ارائه می‌دهند. این مفهوم ابتدا در سال ۱۹۵۲ توسط دافین[۱] و شافر[۲] در راستای برخی مطالعات در زمینه سری‌های فوریه غیر هارمونیک معرفی شد [۱۸] و می‌توان گفت که در حقیقت قاب‌ها تعمیمی از پایه‌های

کلید واژگان. قاب‌ها، دوگان قاب‌ها، دوگان‌های بهینه، فرمول‌های بازسازی.
2020 Mathematics Subject Classification 42C15, 42C40
تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۴/۲۴ بازنگری ۱۴۰۰/۸/۱۸ پذیرش ۱۴۰۰/۸/۳۰ انتشار برخط ۱۴۰۰/۹/۱۶
*نویسنده مسئول
نحوه ارجاع به این مقاله: ف. عربیانی نیشابوری، ع.ا. عارفی جمال، مباحثی روی دوگان بهینه قاب‌ها در فضاهای هیلبرت، به سوی علوم ریاضی، ۲ (۱۴۰۱)، شماره ۱، ۱۶-۱.

[۱] Duffin
[۲] Schaeffer

ریس هستند، با این تفاوت اساسی که قاب‌ها به دلیل وجود عناصر اضافی، در مقابل حذف و آشفتگی بردارها مقاوم‌ترند. این ویژگی مهم موجب شده که به ویژه در دو دهه اخیر قاب‌ها در علوم مهندسی و کاربردی مورد توجه فراوانی باشند [۶–۱۰، ۱۹] و انواع مختلف قاب‌ها و کاربردهای آنها توسط بسیاری از محققین مورد مطالعه قرار گیرند. در واقع در نظریه قاب‌ها، هر بردار مانند $f \in \mathcal{H}$ در فضای هیلبرت مورد مطالعه، می‌تواند با مقادیر عددی $\{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I}$ نمایش داده شود و سپس f به کمک یک الگوریتم توسط قاب دوگان، از این ضرایب بازسازی شود. در کاربردهای عملی، در این انتقالات برخی از ضرایب از دست می‌روند، تغییر شکل می‌دهند و یا دچار اغتشاش می‌شوند و نیاز داریم فقط با بخشی از اطلاعات در دسترس، بازسازی عناصر را انجام دهیم. بنابراین یکی از مسائل مهم در نظریه قاب‌ها، پیدا کردن دوگان‌های غیرکانونی و نیز دوگان‌های بهینه یک قاب، تحت حذف برخی عناصر است. یعنی یافتن دوگانی از یک قاب که خطای بازسازی در اثر حذف یک یا بیشتر از یک عنصر را کمینه کند. این مفهوم توسط هان[۳] و همکارانش در [۲۴، ۲۶] معرفی شد.

در این مقاله، شرح مختصری بر مفهوم قاب‌ها و دوگان آنها خواهیم داشت و کاربرد دوگان قاب‌ها در پردازش سیگنال را بررسی خواهیم کرد. سپس، مساله بازسازی بهینه و برخی نتایج مهم در این زمینه را بیان کرده و در نهایت چند مساله باز در این راستا مطرح می‌کنیم. ابتدا تعاریف مقدماتی قاب‌های نامتناهی را بیان می‌کنیم.

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت جدایی‌پذیر و I یک مجموعه اندیس‌گذار شمارا باشد. دنباله $F := \{f_i\}_{i\in I}$ در $\mathcal{H}$ یک قاب نامیده می‌شود هرگاه ثابت‌های مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \qquad (f \in \mathcal{H}). \tag{۱.۱}$$

در این تعریف ثابت‌های A و B به ترتیب کران های پایین و بالای قاب نامیده می‌شوند. اگر F یک قاب باشد، به راحتی ثابت می‌شود که $\overline{\text{span}}\{f_i\}_{i\in I} = \mathcal{H}$، اگر چه این شرط برای وجود قاب‌های نامتناهی، کافی نیست. اگر در رابطه فوق فقط نامساوی کران بالا برقرار باشد، آنگاه F یک دنباله بسل نامیده می‌شود. به هر دنباله بسل سه عملگر مهم نسبت داده می‌شود. عملگر تجزیه $T_F : l^2(I) \to \mathcal{H}$ به صورت

$$T_F\{c_i\}_{i\in I} = \sum_{i\in I} c_i f_i$$

تعریف می‌شود. عملگر آنالیز $T_F^* : \mathcal{H} \to l^2(I)$، که الحاقی عملگر تجزیه است و به صورت

$$T_F^* f = \{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I}$$

تعریف می‌شود. همچنین عملگر قاب روی فضای $\mathcal{H}$ که ترکیب این دو عملگر است، یعنی $S_F = T_F T_F^*$. همه این عملگرها برای دنباله بسل F خوش‌تعریف و کراندارند. به‌علاوه، به‌راحتی می‌توان نشان داد که F یک قاب است اگر و تنها اگر عملگر قاب آن وارون‌پذیر باشد [۱۳]. دنباله بسل $G := \{g_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ دوگان

[۳] Han

F نامیده می‌شود هرگاه $T_G T_F^* = I_{\mathcal{H}}$ یا به عبارت دیگر،

$$f = \sum_{i\in I} \langle f, f_i \rangle g_i, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

برای هر قاب F می‌توان نوشت

$$f = S_F S_F^{-1} f = \sum_{i\in I} \langle f, S_F^{-1} f_i \rangle f_i = \sum_{i\in I} \langle f, f_i \rangle S_F^{-1} f_i, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

بنابراین می‌توان گفت هر قاب حداقل یک دوگان به صورت $\{S_F^{-1} f_i\}_{i\in I}$ دارد که دوگان کانونی یا دوگان استاندارد قاب نامیده می‌شود. اگر یک دنباله بسل دارای یک دوگان باشد، آن دنباله و دوگانش هر دو قاب هستند [۱۳]. همچنین ثابت می‌شود که هر دوگان $\{g_i\}_{i\in I}$ از قاب F به‌صورت $g_i = S_F^{-1} f_i + u_i$، $i \in I$، است که در آن $\{u_i\}_{i\in I}$ دنباله‌ای است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\sum_{i\in I} \langle f, f_i \rangle u_i = 0, \quad (f \in \mathcal{H}). \tag{۲.۱}$$

۲. کاربرد دوگان‌ها در پردازش سیگنال

قاب‌های گابور[۴] و موجک[۵] دو نوع مهم از قاب‌های نامتناهی هستند که در تحلیل‌های زمان–فرکانس نقش بسیار مهمی دارند و توسط انتقال‌ها، مدولاسیون‌ها و اتساع‌های یک سیگنال تشکیل می‌شوند. در این بخش، این قاب‌ها را معرفی می‌کنیم و با کاربرد دوگان قاب‌ها در پردازش سیگنال آشنا می‌شویم. در واقع نظریه ریاضی این نوع قاب‌ها بر اساس سه عملگر مهم روی فضای هیلبرت $L^2(\mathbb{R})$ است. انتقال به اندازه $a \in \mathbb{R}$،

$$\mathrm{T}_a : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \text{ ، } T_a f(x) = f(x-a)$$

مدولاسیون به مقیاس $b \in \mathbb{R}$،

$$\mathrm{E}_b : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \text{ ، } E_b f(x) = e^{2\pi i b x} f(x)$$

و اتساع به اندازه $c \neq 0$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{D}_c : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \text{ ، } D_c f(x) = |c|^{1/2} f(cx).$$

[۴] Gabor
[۵] wavelet

یک قاب گابور برای $L^2(\mathbb{R})$ به فرم $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ است که در آن $g\in L^2(\mathbb{R})$ و $a,b>0$. برای یک قاب گابور $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ دوگان کانونی به صورت $\{E_{mb}T_{na}S^{-1}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ می‌باشد که S عملگر قاب گابور است و در صورتی که $ab<1$ قاب گابور تعداد نامتناهی دوگان خواهد داشت. در بسیاری از کاربردها با استفاده از دوگان‌های غیرکانونی نتایج دقیق‌تری برای بازسازی به دست می‌آید. روش‌هایی برای ساخت یک خانواده از دوگان‌ها و همچنین مقایسه دوگان کانونی با دوگان‌های غیرکانونی در پردازش سیگنال‌ها در [۴، ۵، ۱۲، ۱۴، ۲۳] ارائه شده است، که اینجا به‌طور مختصر بیان می‌کنیم. فرض کنید $\psi\in L^2(\mathbb{R})$. عملگر اتساع D_a روی $L^2(\mathbb{R})$ برای $a>1$ را در نظر بگیرید. خانواده $\{D_a^jT_k\psi\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ یک سیستم موجک تولید شده توسط تابع ψ نامیده می‌شود. همچنین یک سیستم موجک که یک قاب برای $L^2(\mathbb{R})$ نیز باشد، قاب موجک نامیده می‌شود. مشابه قبل دو قاب موجک $\{D_a^jT_{bk}g\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ و $\{D_a^jT_{bk}h\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ دوگان یکدیگر گفته می‌شوند، هرگاه

$$f=\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}\langle f,D_a^jT_{bk}h\rangle D_a^jT_{bk}g,\quad (f\in L^2(\mathbb{R})).$$

با توجه به اینکه دوگان کانونی یک قاب موجک لزوما ساختار یک سیستم موجک را ندارد [۱۵]، دوگان‌های غیرکانونی نقش بسیار مهمی در این نوع قاب‌ها دارند. قضیه زیر روشی برای ساخت دوگان قاب‌های موجک ارائه می‌دهد.

قضیه ۱.۲. [۲۳] *فرض کنید $n\in\mathbb{N}$ و $a>1$. اگر $g\in L^2(\mathbb{R})$ طوری باشد که نگاشت $\widehat{g}$ تابعی حقیقی مقدار باشد و به ازای یک مقدار $c\in\mathbb{Z}$، $\mathrm{supp}\widehat{g}\subset[-a^c,-a^{c-n}]\cup[a^{c-n},a^c]$ و*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{g}(a^j\xi)=1\qquad (a.e.\quad \xi\in\mathbb{R}),$$

آنگاه تابع g و تابع h تعریف شده به‌صورت

$$h(x)=bg(x)+2b\sum_{j=1}^{n-1}a^{-j}g(a^{-j}x)\qquad (x\in\mathbb{R}). \tag{۱.۲}$$

قاب‌های دوگانی به‌صورت $\{D_a^jT_{bk}g\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ و $\{D_a^jT_{bk}h\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ برای $L^2(\mathbb{R})$ تشکیل می‌دهند.

قضیه ۲.۲. [۴] *فرض کنید $g\in L^2(\mathbb{R})$ و مقادیر n، a، b در فرضیات قضیه ۱.۲ صدق کنند. همچنین فرض کنید ثابت‌های مثبت A و B موجود باشند به طوری که*

$$A\le G(\xi):=\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\widehat{g}(a^j\xi)|^2\le B\quad (a.e.\quad \xi\in\mathbb{R}).$$

آنگاه عملگر قاب موجک $\{D_a^j T_{bk} g\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\widehat{S}\widehat{f} = \frac{G}{b}\widehat{f}.$$

حال به کمک قضیه‌های فوق یک خانواده از دوگان های غیر کانونی برای برخی قاب های موجک ساخته می‌شود.

نتیجه ۳.۲. [۴] *فرض کنید $g \in L^2(\mathbb{R})$ و مقادیر n، a، b در شرایط قضیه ۱.۲ صدق کنند. در این صورت توابع ϕ_i که در رابطه زیر صدق می‌کنند*

$$\widehat{\phi_i} = \frac{b}{G}\widehat{g} - \widehat{g} + \frac{G}{b}\widehat{\phi_{i-1}}, \qquad (1 \le i < \infty)$$

خانواده ای از قاب های دوگان به صورت $\{D_a^j T_{bk} g\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ و $\{D_a^j T_{bk} \phi_i\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ برای $L^2(\mathbb{R})$، تولید می‌کنند که در آن $\phi_0 = h$ از قضیه ۱.۲ داده می‌شود.

برای درک اهمیت نتایج فوق مثال زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۴.۲. اگر $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ به صورت زیر تعریف شود

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0, \\ 0 & x \le 0. \end{cases}$$

قرار دهید $f_1(x) = f(x - \frac{1}{8})f(\frac{1}{2} - x)$ برای $x \in \mathbb{R}$، بنابراین $supp f_1 \subset [\frac{1}{8}, \frac{1}{2}]$. حال در نظر بگیرید

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1(x) & x > 0, \\ f_1(-x) & x \le 0 \end{cases}$$

و قرار دهید $\widehat{g} = \dfrac{f_2}{\sum_{j=-1}^{1} f_2(2^j .)}$، در نتیجه $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(2^j x) = 1$. با قرار دادن $n = 2$، $c = -1$ و $b = \frac{1}{2} \in (0, \frac{1}{2a^c}]$، نتیجه می‌گیریم که $\{D_a^j T_{bk} g\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ یک قاب موجک با یک قاب دوگان موجک تولید شده توسط تابع

$$h(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(\frac{1}{2}x),$$

است. با استفاده از نتیجه ۳.۲ خانواده ای از دوگان‌ها با تبدیل فوریه زیر به دست می‌آوریم

$$\widehat{\phi_i} = \frac{1}{2G}\widehat{g} - \widehat{g} + 2G\widehat{\phi_{i-1}}, \qquad (۲.۲)$$

برای هر $i \geq 0$، که $G = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(2^j.)|^2$ و $\phi_0 = h$.

به منظور مقایسه قاب‌های دوگان موجک در دقت بازسازی، قاب موجک مثال ۴.۲ را در نظر می‌گیریم. آنگاه به کمک قاب‌های دوگان موجک معرفی شده توسط رابطه فوق می‌توان فرمول بازسازی را به صورت زیر نوشت

$$f = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \langle f, D_a^j T_{bk} g\rangle D_a^j T_{bk}\phi_i, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \quad i \geq 0. \qquad (۳.۲)$$

برای درک بهتر مزایای استفاده از دوگان‌ها بر اساس مدل فوق در تقریب یک سیگنال $f \in L^2(\mathbb{R})$، توابع آزمون هویساین[۶]، بامپ[۷]، داپلر[۸]، کوادچریپ[۹] و میش مش[۱۰] تعریف شده در [۱۶،۱۷] را در نظر می‌گیریم. برای محاسبه تخمین خطاها از فرمول خطای میانگین مربعات زیر استفاده می‌کنیم

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n} |\widehat{x}_i - x_i|^2.$$

		AMSE			
Dual generator	Heavisine	Bumps	Doppler	QuadChrip	MishMash
Canonical	7.098725	$5.80E-10$	0.045354	0.684561	0.812872
φ_0	7.004994	$5.72E-10$	0.043258	0.661926	0.78447
φ_2	7.002138	$5.71E-10$	0.043244	0.661671	0.784236
φ_3	6.996444	$5.711E-10$	0.0432	0.661164	0.78377
φ_4	6.985143	$5.713E-10$	0.043165	0.66016	0.782844
φ_5	6.962903	$5.70E-10$	0.04306	0.658189	0.781012
φ_6	6.919891	$5.693E-10$	0.042853	0.654389	0.777432
φ_7	6.839766	$5.67E-10$	0.42448	0.647352	0.770606
φ_8	6.703133	$5.65E-10$	0.04168	0.635525	0.758292
φ_9	6.52425	$5.66E-10$	0.040303	0.62084	0.739019

جدول ۱: میزان خطای بازسازی برای تقریب توابع آزمون با فرمول دوگان نظیر مولدهای دوگان متفاوت

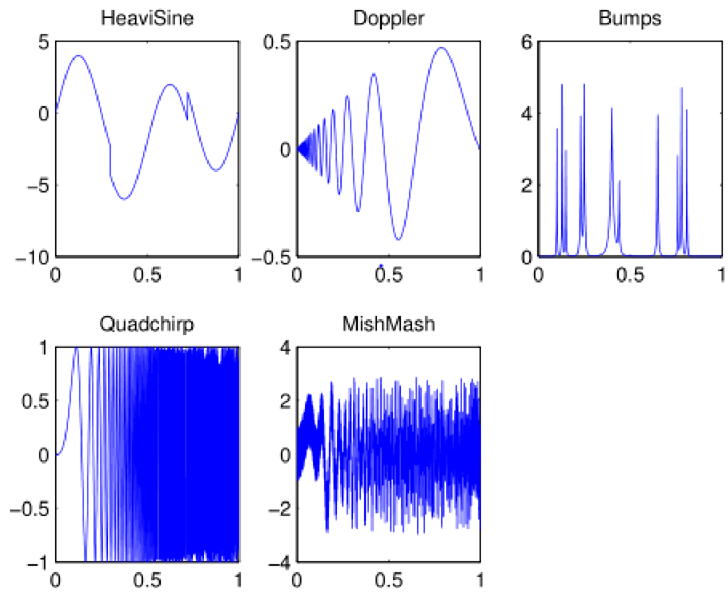
[۶] Heavisine

[۷] Bump

[۸] Doppler

[۹] QuadChrip

[۱۰] MishMash



شکل ۱: توابع آزمون

	AMSEs				
	Heavisine	Bumps	Doppler	QuadChrip	MishMash
Canonical	7.098725	$5.80E-10$	0.045354	0.684561	0.812872
Hard wavelet den.	0.22	0.27	0.29	0.99	1.00
Soft wavelet den.	0.07	0.13	0.11	0.73	0.95
φ_8	6.703133	$5.65E-10$	0.04168	0.635525	0.758292
φ_9	6.52425	$5.66E-10$	0.040303	0.62084	0.739019

جدول ۲: میزان خطای بازسازی برای تقریب توابع آزمون با روش‌های مختلف

همانطور که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود برای هر تست سیگنال بجز میش‌مش، یکی از دوگان‌های غیر کانونی خطای کمتری نسبت به دوگان کانونی ایجاد می‌کنند. علاوه بر آن، مقایسه نتایج جدول ۱ با نتایج حاصل از بازسازی با دوگان قاب گابور در [۵] و نیز استفاده از روش‌های دیگر مانند نویززدایی با موجک سخت[۱۱] و نرم[۱۲] در [۱۱] نشان می‌دهد که در این مثال تقریبا برای تمام توابع آزمون، دوگان‌های قاب موجک (۳.۲) موثرتر بوده‌اند، جدول ۲ را ببینید. اگر چه بر اساس نوع قاب و دوگان ممکن است قاب‌های گابور و یا روش‌های دیگر گاهی بهتر عمل کنند، اما مطلب فوق ارزش محاسبه و شناسایی دوگان‌های قاب را برای بازسازی نشان می‌دهد.

[۱۱] hard wavelet denoising

[۱۲] soft wavelet denoising

Normalized AMSEs					
Dual generator	Heavisine	Bumps	Doppler	QuadChrip	MishMash
Canonical	5.623246	$1.88E-10$	0.140262	1.191727	0.412049
φ_0	6.121439	$6.23E-11$	0.058008	0.79817	1.865155
φ_3	6.092812	$9.02E-11$	0.070151	0.427603	1.933921
φ_4	6.097072	$9.99E-11$	0.070707	0.396412	1.907641
φ_5	6.095215	$9.97E-11$	0.07114	0.38542	1.899557
φ_6	6.086826	$9.95E-11$	0.071961	0.380742	1.894946
φ_7	6.073669	$9.83E-11$	0.073067	0.378176	1.890281
φ_8	6.05725	$9.66E-11$	0.074316	0.376418	1.885203
φ_9	6.038534	$9.47E-11$	0.075612	0.375034	1.879932
φ_{14}	5.926096	$8.53E-11$	0.081642	0.370649	1.855485
φ_{30}	5.542141	$6.57E-11$	0.092297	0.370165	1.810069

جدول ۳: میزان خطای بازسازی هنجار شده برای تقریب توابع آزمون با دوگان های مختلف

همچنین به منظور مقایسه دقیق‌تر خطاها، نتایج جدول ۱ در جدول ۳ هنجار[۱۳] شده‌اند.

۳. مسئله بازسازی بهینه

همانطور که در مقدمه بیان شد، مسئله یافتن دوگان بهینه در قاب‌های متناهی در مسائل کاربردی اهمیت بسزایی دارد. قبل از مطالعه و بررسی دوگان‌های بهینه لازم است به معرفی قاب‌های متناهی در فضاهای هیلبرت با بعد متناهی بپردازیم. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت n-بعدی باشد. دنباله $F=\{f_i\}_{i\in I_m}\subset\mathcal{H}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود، هرگاه $\text{span}\{f_i\}_{i\in I_m}=\mathcal{H}$ که در آن $I_m=\{1,...,m\}$. مشابه قبل به هر قاب متناهی F نیز سه عملگر نسبت داده می‌شود؛ عملگر تجزیه $T_F : l^2(I_m)\to\mathcal{H}$ که به صورت $T_F\{c_i\}_{i\in I_m}=\sum_{i\in I_m}c_i f_i$ تعریف می‌شود. عملگر آنالیز، الحاقی T_F که به‌صورت $T_F^*f=\{\langle f,f_i\rangle\}_{i\in I_m}$ به دست می‌آید، و عملگر قاب که ترکیب این دو عملگر است، $S_F=T_FT_F^*$. هر دنباله متناهی بسل است، در نتیجه همه این عملگرها خوش تعریف و کراندارند. با توجه به این حقیقت که فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ دارای بعد متناهی است، عملگرهای تجزیه و آنالیز پیوسته‌اند و به ویژه $f\mapsto\|T_F^*f\|$ یک تابع ناصفر روی کره واحد فشرده در $\mathcal{H}$ است. در نتیجه می‌توان گفت $F=\{f_i\}_{i\in I_m}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ است، اگر و تنها اگر ثابت‌های مثبت A و B موجود باشند به‌طوری‌که

$$A\|f\|^2\leq\|T_F^*f\|=\sum_{i\in I_m}|\langle f,f_i\rangle|^2\leq B\|f\|^2,\qquad(f\in\mathcal{H}).\tag{۱.۳}$$

در تعریف فوق ثابت‌های A و B به ترتیب کران‌های پایین و بالای قاب نامیده می‌شوند. مشابه قاب‌های نامتناهی، اگر $A=B$، قاب F چسبان نامیده می‌شود و در صورتی‌که $A=B=1$ آن را یک قاب پارسوال می‌نامیم. قاب F یک قاب یکنواخت نامیده می‌شود، هرگاه ثابت α موجود باشد به‌طوری‌که $\|f_i\|=\alpha$، برای

[۱۳] normalized

هر $i \in I$. دنباله $G := \{g_i\}_{i\in I_m} \subseteq \mathcal{H}$ دوگان F نامیده می‌شود، هرگاه $T_G T_F^* = I_{\mathcal{H}}$. به علاوه، ثابت می‌شود که F یک قاب است اگر و تنها اگر عملگر قاب آن وارون پذیر باشد [۱۳]، و در نتیجه $S_F^{-1}F$ یک دوگان قاب F است که دوگان کانونی نامیده می‌شود. در ادامه مجموعه تمام دوگان‌های F را با D_F نشان می‌دهیم.

مفهوم بازسازی های بهینه به کمک قاب‌های پارسوال با الگوسازی دقیق ابتدا توسط هلمز[۱۴] و پالسن[۱۵] در [۲۱] معرفی شد. به‌طور دقیق‌تر، اگر $\mathcal{D}_r$ نشان‌دهنده مجموعه همه ماتریس‌های قطری $m \times m$ با r عدد 1 و $n-r$ عدد 0 روی قطر اصلی باشد، در این صورت یک قاب پارسوال $F = \{f_i\}_{i\in I_m}$ برای فضای هیلبرت n بعدی $\mathcal{H}$ بهینه تحت 1−حذف نامیده می‌شود، هرگاه

$$\max\{\|T_F^* D T_F\| : D \in \mathcal{D}_1\}$$

بین تمام قاب‌های پارسوال m−عضوی در $\mathcal{H}$، مینیمم شود. همچنین، به استقرا می‌توان قاب پارسوال بهینه را برای هر r−حذف نیز تعریف کرد. این مساله سپس توسط هان و همکارانش در [۲۶] برای قاب‌های گسسته در حالت کلی و پیدا کردن دوگان بهینه به صورت زیر مطرح شد.

فرض کنید $G = \{g_i\}_{i\in I_m}$ یک دوگان از قاب $F = \{f_i\}_{i\in I_m}$ باشد و نیز $J \subset I_m$. برای هر $f \in \mathcal{H}$ اگر ضرایب $\{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in J}$ حذف شده باشند، در این صورت برای بازسازی عنصر f با ضرایب باقیمانده خواهیم داشت

$$\sum_{i\in I_m\setminus J} \langle f, f_i\rangle g_i, \quad (f \in \mathcal{H}).$$

بنابراین عملگر خطا، E_J، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E_J f = \sum_{i\in J}\langle f, f_i\rangle g_i = (T_G D T_F^*)f,$$

که D یک ماتریس قطری $m \times m$ است با عناصر قطری $d_{ii} = 1$ برای $i \in J$ و سایر جاها $d_{ij} = 0$.
فرض کنید

$$d_r(F,G) = \max\{\|T_G D T_F^*\| : D \in \mathcal{D}_r\} = \max\{\|E_J\| : \mathrm{card}(E_J) = r\}, \qquad (۲.۳)$$

که در آن نرم، نرم عملگری و $\mathcal{D}_r$ مجموعه همه ماتریس‌های قطری $m \times m$ با r عدد 1 و $n-r$ عدد 0 روی قطر اصلی است. در این صورت $d_r(F,G)$ عبارت است از بزرگترین خطای ممکن، زمانی که r−حذف رخ

[۱۴] Holmes

[۱۵] Paulsen

می‌دهد. گوییم G دوگان بهینه F تحت 1−حذف است، هرگاه

$$d_1(F,G) = \min\{d_1(F,Y) : Y \in D_F\}. \tag{۳.۳}$$

که در آن D_F مجموعه تمام دوگان‌های F است. به استقرا، یک قاب دوگان G بهینه برای F تحت r−حذف است، هرگاه تحت $(r-1)$−حذف بهینه باشد و نیز داشته باشیم

$$d_r(F,G) = \min\{d_r(F,Y) : Y \in D_F\}.$$

با توجه به تعریف دوگان بهینه، اگر یک دوگان برای 1−حذف، دوگان بهینه یکتا باشد، آنگاه برای هر r−حذف نیز بهینه است. حال اولین سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا برای یک قاب داده شده همیشه دوگان بهینه وجود دارد؟ پاسخ این سوال مثبت است. در [۲۶] نشان داده شد که برای قاب $F = \{f_i\}_{i\in I_m}$ در $\mathcal{H}$ که $f_i \neq 0$، $i \in I_m$، مجموعه دوگان‌های بهینه F که اینجا با OD_F نشان داده می‌شود، تحت هر r−حذف یک زیر مجموعه ناتهی، فشرده و محدب است. سپس بررسی کردند که تحت چه شرایطی دوگان کانونی بهینه است. مهمترین نتایج به‌دست آمده به شرح زیر است.

گزاره ۱.۳. *فرض کنید $F = \{f_i\}_{i\in I_m}$ یک قاب پارسوال برای $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت دوگان کانونی، یکتا دوگان بهینه تحت 1−حذف (و بنابراین هر r−حذف) است اگر و تنها اگر F یک قاب یکنواخت باشد.*

فرض کنید $F = \{f_i\}_{i\in I_m}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد. در نظر بگیرید

$$c = \max\{\|S_F^{-1}f_i\|\|f_i\| : 1 \leq i \leq m\},$$

$\Lambda_1 = \{1 \leq i \leq m : \|S_F^{-1}f_i\|\|f_i\| = c\}$ و $\Lambda_2 = \{1,...,m\} \setminus \Lambda_1$. همچنین فرض کنید $\mathcal{H}_i = \operatorname{span}\{f_j : j \in \Lambda_i\}$، برای $i = 1,2$. با استفاده از این نمادگذاری‌ها، نتایج زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۲.۳. [۲۴] *فرض کنید $F = \{f_i\}_{i\in I_m}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ باشد. آنگاه احکام زیر معادل‌اند:*
(۱) دوگان کانونی $\{S_F^{-1}f_i\}_{i\in I_k}$ بهینه یکتا تحت 1−حذف است.
(۲) $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$ و $\{f_i\}_{i\in\Lambda_2}$ مستقل خطی است.

گزاره ۳.۳. [۲۴] *فرض کنید $F = \{f_i\}_{i\in I_m}$ یک قاب از $\mathcal{H}$ باشد به‌طوری‌که $\{f_i\}_{i\in\Lambda_1}$ مستقل خطی است، آنگاه*

(۱) اگر $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$، دوگان بهینه تحت 1− حذف برای F است اما این دوگان بهینه یکتا نیست.
(۲) اگر دنباله ای از اسکالرها به صورت $\{c_i\}_{i\in I_m}$ موجود باشد به طوری‌که $\sum_{i\in I_m} c_i f_i = 0$ و $c_i \neq 0$، برای هر $i \in \Lambda_1$. آنگاه دوگان کانونی، بهینه برای 1−حذف نیست.

مثال زیر نشان می دهد که دوگان کانونی لزوما دوگان بهینه یکتا برای یک قاب پارسوال نیست.

مثال ۴.۳. فرض کنید $\{e_1, e_2, e_3\}$ پایه متعامد یکه استاندارد برای $\mathbb{R}^3$ باشد و

$$F = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_1, \frac{1}{\sqrt{3}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_3, \frac{1}{\sqrt{2}}e_3 \right\}.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که F یک قاب پارسوال غیر یکنواخت برای $\mathbb{R}^3$ است. بنابراین با توجه به گزاره ۱.۳، دوگان کانونی آن یعنی F دوگان بهینه یکتا نیست. اگر چه نشان می‌دهیم که دوگان کانونی تحت 1−حذف بهینه است. برای این منظور، به برهان خلف فرض کنید دوگانی مانند $G = \{g_i\}_{i=1}^{7}$ از F وجود دارد که در

$$\max_{i\in I_7} \|g_i\|\|f_i\| < \max_{i\in I_7} \|f_i\|^2 \tag{۴.۳}$$

صدق می‌کند. می‌دانیم که هر دوگان F به‌صورت $\{f_i + u_i\}_{i=1}^{7}$ است که در آن $\{u_i\}_{i=1}^{7}$ در (۲.۱) صدق می‌کند. بنابراین

$$u_2 = -u_1, u_7 = -u_6, u_5 + u_6 + u_7 = 0.$$

حال با در نظر گرفتن بردار دلخواه $u_1 = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ و قرار دادن $u_2 = -u_1$ با استفاده از (۴.۳) به دست می‌آوریم:

$$\|g_i\|^2\|f_i\|^2 < \frac{1}{4}, (i \in I_7)$$

به ویژه برای $i = 1, 2$ نتیجه می‌گیریم که $a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}a < 0$ ،$a^2 + b^2 + c^2 - \sqrt{2}a < 0$ که تناقض است. پس دوگان کانونی بهینه تحت 1−حذف است، در حالی که دوگان بهینه یکتا نیست.

با توجه به‌این‌که مجموعه دوگان‌های بهینه تحت هر حذف یک زیر مجموعه ناتهی، فشرده و محدب است، پس مجموعه نقاط فرین آن ناتهی است [۲۲]. نویسندگان با ذکر این نکته و با هدف شناسایی مجموعه نقاط فرین در مجموعه OD_F در [۱] به معرفی و شناسایی دوگان‌های بهینه غیرکانونی پرداختند و سپس مجموعه تمام نقاط فرین در OD_F را تحت 1−حذف به طور کامل شناسایی کردند. در واقع اگر برای یک دوگان $G = \{g_i\}_{i\in I_m}$ از $\{f_i\}_{i\in I_m}$، قرار دهید

$$c^g = \max\{\|g_i\|\|f_i\| : i \in I_m\}, \Lambda_1^g = \{i \in I_m : \|g_i\|\|f_i\| = c^g\}$$

و $\Lambda_2^g = I_m \setminus \Lambda_1^g$ و همچنین فرض کنید $\mathcal{H}_i^g = \mathrm{span}\{f_j : j \in \Lambda_i^g\}$ ،$i = 1, 2$، آنگاه با این نمادگذاری‌ها نتایج زیر را داریم.

قضیه ۵.۳. [۱] *فرض کنید $F = \{f_i\}_{i\in I_m}$ یک قاب از $\mathcal{H}$ باشد و $G = \{g_i\}_{i\in I_m}$ یک دوگان بهینه از F باشد. دراین‌صورت G یک نقطه فرین برای OD_F است اگر و تنها اگر $\{f_i\}_{i\in\Lambda_2^g}$ مستقل خطی باشد.*

به کمک قضیه ۵.۳ می‌توان دید که دوگان کانونی، که در واقع دارای l^2–نرم مینیمم بین دوگان‌های F است، حتی اگر دوگان بهینه باشد لزوماً عنصر فرین نیست. از طرف دیگر، با توجه به‌این‌که OD_F ناتهی و فشرده است، دارای عضوی با l^2–نرم ماکسیمم است. یعنی دوگان بهینه $\{g_i\}_{i\in I_m}$ از F موجود است به‌طوری‌که

$$\left(\sum_{i\in I_m}\|g_i\|^2\right)^{1/2}=\max\left\{\left(\sum_{i\in I_m}\|h_i\|^2\right)^{1/2}:\quad \{h_i\}_{i\in I_m}\in OD_F\right\}.$$

به وسیله اصل ماکسیمم مقدماتی[۱۶] [۲۲] می‌توان نشان داد که چنین عناصری، فرین هستند.

گزاره ۶.۳. [۱] *فرض کنید $F=\{f_i\}_{i\in I_k}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ و $G=\{g_i\}_{i\in I_k}\in D_F$ دارای l^2–نرم ماکسیمم بین تمام دوگان‌های بهینه F باشد. آنگاه G نقطه فرین مجموعه OD_F است.*

همچنین در [۱] برخی مشخصه‌سازی‌ها برای شناسایی دوگان‌های بهینه غیرکانونی انجام شد. به علاوه، قاب‌های دوگان بهینه تحت یک نوع آشفتگی عملگری قاب‌ها و تحت 1–حذف بررسی شد.

قضیه ۷.۳. *اگر $F=\{f_i\}_{i\in I_m}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ و $U\in B(\mathcal{H})$ عملگری وارون‌پذیر باشد که $\|U\|\|U^{-1}\|\le 1$. آنگاه تحت 1–حذف $\{g_i\}_{i\in I_m}$ دوگان بهینه F است اگر و تنها اگر $\{Ug_i\}_{i\in I_m}$ دوگان بهینه $(U^*)^{-1}F:=\{(U^*)^{-1}f_i\}_{i\in I_m}$ باشد. به علاوه، یک تناظر دوسویی بین دوگان‌های بهینه F و UF وجود دارد.*

در مثال زیر ملاحظه می‌کنیم که قضیه ۲.۳ برای دوگان‌های غیرکانونی برقرار نیست.

مثال ۸.۳. فرض کنید $\{e_1,e_2\}$ پایه متعامد یکه استاندارد برای $\mathbb{R}^2$ باشد و

$$F=\left\{e_1,e_2,\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)\right\}.$$

سپس F یک قاب برای $\mathbb{R}^2$ است. ثابت می‌شود که F یک دوگان بهینه به‌صورت زیر دارد [۲۶]

$$\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\\[2ex]\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\\[2ex]\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\\[2ex]\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right\}.$$

[۱۶] elementary maximum principle

اکنون دنباله زیر را در نظر بگیرید

$$G=\left\{\begin{bmatrix}\frac{3+\sqrt{3}}{2}\\ \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{4}\\ \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{4}\end{bmatrix}\right\}.$$

دراین‌صورت $G:=\{g_i\}_{i=1}^{3}$ دوگان قاب F است و $\|g_i\|\|f_i\|=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$، برای هر i. به عبارت دیگر $\{f_i\}_{i\in\Lambda_2^g}=\emptyset$ و نه تنها فضاهای $\mathcal{H}_1^g$ و $\mathcal{H}_2^g$ اشتراکی ندارند بلکه متعامد هستند، یعنی $\mathcal{H}_1^g\perp\mathcal{H}_2^g$ اگر چه G دوگان بهینه F نیست.

برای مطالعه بیشتر و دقیق‌تر دوگان‌های بهینه زمانی که اندازه عملگر خطا با نرم عملگری سنجیده می‌شود خواننده را به [۱،۲۴–۲۶] ارجاع می دهیم.

مفهوم دوگان بهینه با در نظر گرفتن شعاع طیفی بجای نرم عملگری برای عملگر خطا در [۲۸] مورد مطالعه قرار گرفت. در این راستا، کمینه کردن خطای بازسازی با شعاع عددی و نیز مقایسه آن با شعاع طیفی و نرم عملگری در [۲] بررسی شد. همچنین برخی تعمیم ها از این مساله برای انواع دیگر قاب‌ها مانند قاب‌های ترکیب و K-قاب‌ها انجام شده است [۳،۱۹، ۲۰،۲۷]، با این وجود هنوز مسائل باز زیادی در این راستا و حتی برای قاب‌های گسسته وجود دارد که در پایان چند نمونه از این مسائل را برای علاقه‌مندان مطرح می‌کنیم.

۱- در مسائل کاربردی معمولا بیش از یک حذف رخ می دهد، شناسایی دوگان‌های بهینه تحت حذف $r>1$ از مسائل مهم و بسیار جالب در این زمینه است. با در نظر گرفتن این نکته و قضیه ۵.۳، آیا می‌توان نقاط فرین مجموعه OD_F راتحت 2- یا به طور کلی r-حذف نیز شناسایی کرد؟

۲- آیا می‌توان شرایط لازم و کافی برای یک قاب تعیین کرد به‌طوری‌که تحت آن یک دوگان غیرکانونی، دوگان بهینه یکتا باشد؟

۳- همانطور که در مقدمه اشاره شد، در مبحث انتقالات سیگنال‌ها، برخی ضرایب ممکن است دچار اغتشاش یا تغییر شکل شوند در حالی که تاکنون فقط برای مساله حذف ضرایب الگوسازی انجام شده است. بنابراین یک مساله دیگر ارائه روشی برای بازسازی سیگنال‌ها تحت آشفتگی یا تغییر شکل ضرایب است. (برای این منظور، قطعا ابتدا باید یک نوع خاص از تغییر شکل را در نظر گرفت و سپس الگوریتم‌هایی برای حل مساله ارائه داد.)

مراجع

[1] F. Arabyani-Neyshaburi, A. Arefijamaal and Gh. Sadeghi, *Extreme points and identification of optimal alternate dual frames,* Linear Algebra Appl. **549** (2018) 123–135.

[2] F. Arabyani-Neyshaburi, A. Arefijamaal and Gh. Sadeghi, *Numerically and spectrally optimal dual frames in Hilbert spaces,* Linear Algebra Appl. **604** (2020) 52–71.

[3] F. Arabyani-Neyshaburi and R.A. Kamyabi-Gol, *Matrix methods for perfect signal recovery underlying range space of operators,* ArXiv:2008.04892v1.

[4] A. Arefijamaal, F. Arabyani-Neyshaburi and S. Matindust, *Construction of dual wavelet frame pairs and signal recovery,* SeMA J. **76** (2019), no. 1, 27–36.

[5] A. Arefijamaal and E. Zekaee, *Signal processing by alternate dual Gabor frames,* Appl. Comput. Harmon. Anal. **35** (2013) 535–540.

[6] J.J. Benedetto and M. Fickus, *Finite normalized tight frames,* Adv. Comput. Math. **18** (2003), no. 2-4, 357–385.

[7] J.J. Benedetto, A. Powell and O. Yilmaz, *Sigm-Delta quantization and finite frames,* IEEE Trans. Inform. Theory **52** (2006) 1990–2005.

[8] B.G. Bodmann, *Optimal linear transmission by loss-insensitive packet encoding,* Appl. Comput. Harmon. Anal. **22** (2007), no. 3, 274–285.

[9] B.G. Bodmann and V.I. Paulsen, *Frames, graphs anderasures,* Linear. Algebra Appl. **404** (2005) 118–146.

[10] H. Bolcskel, F. Hlawatsch and H.G. Feichtinger, *Frame-theoretic analysis of oversampled filter banks* IEEE Trans. Signal Process. **46** (1998) 3256–3268.

[11] O. Christensen, *Time-Frequency Analysis and its Applications in Denoising*, Thesis, Department of Informatics, University of Bergan, 2002.

[12] O. Christensen, *Pairs of dual Gabor frames with compact support and desired frequency localization,* Appl. Comput. Harmon. Anal. **20** (2006) 403–410.

[13] O. Christensen, *Frames and Bases: An Introductory Course,* Birkhäuser, Boston, 2008.

[14] O. Christensen and R.Y. Kim, *On dual Gabor frame pairs generated by polynomials,* Fourier Anal. Appl. **16** (2010) 11–16.

[15] I. Daubechies, *The wavelet transform, time frequency localization and signal analysis,* IEEE Trans. Inform. Theory **36** (1990), no. 5, 961–1005.

[16] D.L. Donoho and I.M. Johnstone, *Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage,* Biometrika. **81** (1994) 425–455.

[17] D.L. Donoho and I.M. Johnstone, *Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage,* Amer. Statist. Assoc. **90** (1995) 1200–1224.

[18] R. Duffin and A. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series,* Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952) 341–366.

[19] Q. Guo, J. Leng, D. Han, Q. Fan, H. Li and Q. Gao, *Adaptive optimal dual frames for signal reconstruction with erasures,* IEEE Access. **4** (2016) 7577–7584.

[20] S.B. Heineken and P.M. Morillas, *Properties of finite dual fusion frames,* Linear Algebra Appl. **453** (2014) 1–27.

[21] R. Holmes and V. Paulsen, *Optimal frames for erasures,* Linear Algebra Appl. **377** (2004) 31–51.

[22] S.R. Lay, *Convex Sets and Their Applications,* John Wiley & Sons, New York, 1982.

[23] J. Lemvig, *Constructing pairs of dual bandlimited framelets with desired time localization,* Adv. Comput. Math. **30** (2009) 231–248.

[24] J. Leng and D. Han, *Optimal dual frames for erasures II,* Linear Algebra Appl. **435** (2011) 1464–1472.

[25] J. Leng, D. Han and T. Huang, *Optimal dual frames for communication coding with probabilistic erasures,* IEEE Trans. Signal Process. **59** (2011), no. 11, 5380–5389.

[26] J. Lopez and D. Han, *Optimal dual frames for erasures,* Linear Algebra Appl. **432** (2010) 471–482.

[27] P.M. Morillas, *Optimal dual fusion frames for probabilistic erasures,* Electron. J. Linear Algebra **32** (2017) 191–203.

[28] S. Pehlivan, D. Han and R. Mohapatra, *Linearly connected sequences and spectrally optimal dual frames for erasures,* J. Funct. Anal. **265** (2013), no. 11, 2855–2876.